TD 01 IO 2 ①

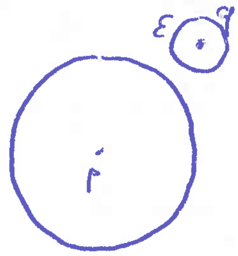
Exo 4 b) Dans un espace vectoriel V sur $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, doué d'une norme $\|\cdot\|$, on considère,

$p \in V$, $r > 0$

$$B(p,r) = \{ v \in V \mid \|v-p\| < r \}$$
$$B'(p,r) = \{ v \in V \mid \underbrace{\|v-p\|}_{d(v,p)} \leq r \}$$

On veut montrer $B'(p,r) = \overline{B(p,r)}$.

(⊇) Par définition, $\overline{B(p,r)} = \bigcap\limits_{\substack{C \supseteq B(p,r) \\ C \text{ fermé}}} C$. Si on montre que



$B'(p,r)$ est fermé, on a montré l'inclusion.

$B'(p,r)$ est fermé si et seulement si (par définition)

$V \setminus B'(p,r) = \{ v \in V \mid \|v-p\| > r \}$ est ouvert.

Pour tout $q \in V \setminus B'(p,r)$, il faut trouver $\varepsilon > 0$ tel que

$B(q,\varepsilon) \subset V \setminus B'(p,r)$.

Soit ε tel que $0 < \varepsilon < \|q-p\| - r$. ($\Leftrightarrow \|q-p\| - \varepsilon > r$)

Remarquer que si $q \notin B'(p,r)$, alors $\|q-p\| > r$, so $\|q-p\| - r > 0$ et un tel ε existe.

Soit $v \in B(q,\varepsilon)$.

$\Leftrightarrow \|v-q\| < \varepsilon$.

$$\|v-p\| = \|v-q+q-p\| \underset{\substack{\uparrow \\ \text{inégalité triangulaire} \\ \text{inverse}}}{\geq} \|q-p\| - \overset{\varepsilon}{\overset{\vee}{\|v-q\|}} > \|q-p\| - \varepsilon > r$$

$\Rightarrow v \in V \setminus B'(p,r)$.

Donc $B(q,\varepsilon) \subset V \setminus B'(p,r)$, c'est à dire $V \setminus B'(p,r)$ est ouvert.

et $B'(p,r)$ est fermé.

$\subseteq$ On sait que $B(p,r) \subseteq \overline{B(p,r)}$, il suffit montrer que si q est tel que $\|q-p\|=r$, alors $q \in \overline{B(p,r)}$.

Ceci équivaut à montrer que $\forall \varepsilon > 0$, $B(q,\varepsilon) \cap B(p,r) \neq \emptyset$.

(ou de façon analogue, que $\exists (v_n)_n$ suite d'éléments dans $B(p,r)$ tels que $v_n \to q$.)

Soit v_t le point ~~$p + t(q-p)$~~, avec $v_t = p + t(q-p)$, avec $t \in \mathbb{R}$.

pour $t=1$, $v_1 = p+q-p = q$. Pour $t=0$, $v_0 = p$.

Donc pour $t \in [0,1]$ on a paramétré le segment entre p et q.

Montrons que $v_t \in B(p,r)$ pour $t \in [0,1[$.

$\| v_t - p\| = \| \cancel{p} + t(q-p) \cancel{-p} \| = \| t(q-p)\| = |t| \, \|q-p\| = t \cdot r < r$.

donc $v_t \in B(p,r)$.

Or, pour $t = 1 - \frac{1}{n}$, $w_n = v_{1-\frac{1}{n}}$ est une suite telle que $w_n \to q$, $w_n \in B(p,r)$, et on a conclus.

(pour montrer $w_n \to q$)

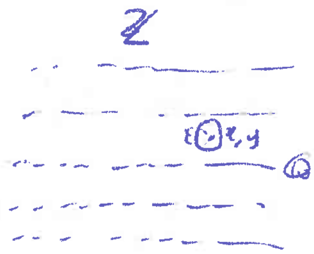
De façon analogue, on peut calculer $\| w_n - q\|$:

$\| w_n - q\| = \| v_{1-\frac{1}{n}} - q\| = \| p + (1-\frac{1}{n})(q-p) - q \| = \|(p-q)(1-(1-\frac{1}{n}))\| =$

$= \frac{1}{n}\|p-q\| = \frac{r}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Exo 7.(f)

$F = \mathbb{Q}\times\mathbb{Z}$, calculer $\bar{F}$, $\mathring{F}$, ∂F. F est dense ? borné ?



- On veut montrer que $\bar{F} = \mathbb{R}\times\mathbb{Z}$.

D'abord on montre que $\mathbb{R}\times\mathbb{Z}$ est fermé :

Soit $p=(x,y)\notin \mathbb{R}\times\mathbb{Z}$, c'est à dire, $y\notin\mathbb{Z}$

Soit $\varepsilon < \min\{\underbrace{y-\lfloor y\rfloor}_{\substack{\{y\} \\ \text{partie fractionnaire} \\ > 0}} ; \underbrace{\lceil y\rceil - y}_{\substack{1-\{y\} \\ > 0}}\} > 0$ car $y\notin\mathbb{Z}$.

Montrons que $B(p,\varepsilon)\subset(\mathbb{R}\times\mathbb{Z})^c$. Si $(x',y')\in B(p,\varepsilon)$, alors

$|y'-y| \leq \|(x',y')-(x-y)\| < \varepsilon$. $\Rightarrow$ $y'\notin\mathbb{Z}$, et $(x',y')\notin\mathbb{R}\times\mathbb{Z}$.

On a donc montré que $\mathbb{R}\times\mathbb{Z}$ est fermé, et donc que $\bar{F}\subseteq\mathbb{R}\times\mathbb{Z}$

(car étant $\bar{F}$ le plus petit fermé contenant $\mathbb{Q}\times\mathbb{Z}$).

Montrons $\bar{F}\supseteq\mathbb{R}\times\mathbb{Z}$. il faut montrer que $\forall\varepsilon>0$, $\forall(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{Z}$,

$B((x,y),\varepsilon)\cap\mathbb{Q}\times\mathbb{Z}\neq\emptyset$. Fixons des tels ε, (x,y).

Comme $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, $\exists\, t\in\mathbb{Q}$, $x<t<x+\varepsilon$. $(t,y)\in\mathbb{Q}\times\mathbb{Z}$ et

~~Alors~~ $\|(t,y)-(x,y)\| = \|(t-x,0)\| = |t-x| < \varepsilon$.

Donc $(x,y)\in\bar{F}$ et on a terminé.

- On veut montrer que $\mathring{F}=\emptyset$.

Soit $(x,y)\in\mathbb{Q}\times\mathbb{Z}$, et ~~supposons que (x,y)~~ Il faut montrer que $\forall$

$\forall\varepsilon>0$, $B(\overset{p}{(x,y)},\varepsilon)\not\subset\mathbb{Q}\times\mathbb{Z}$. Considérons $\varepsilon<1$, et $q=(x,y+\frac{\varepsilon}{2})$

Alors $\|q-p\| = \|(x,y)-(x,\cancel{x}y+\frac{\varepsilon}{2})\| = \|(0,-\frac{\varepsilon}{2})\| = \frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$

~~Donc~~ Donc $q \in B(p,\varepsilon)$ mais $q \notin \mathbb{Q}\times\mathbb{Z}$, car $y + \frac{\varepsilon}{2} \notin \mathbb{Z}$ 4

car était $y \in \mathbb{Z}$ et $\varepsilon < 1$.

Il s'en suit que $\mathring{F} = \emptyset$.

. $\partial F = \overline{F} \setminus \mathring{F} = \mathbb{R}\times\mathbb{Z}$.

. F est dense $\overset{\text{(par déf)}}{\Leftrightarrow}$ $\overline{F} = \mathbb{R}\times\mathbb{R}$. Comme $\overline{F} = \mathbb{R}\times\mathbb{Z} \neq \mathbb{R}\times\mathbb{R}$, F n'est pas dense.

. F n'est pas borné. Si par l'absurde il l'était, on aurait que $\exists M > 0$ tel que $B(0,M) \supseteq F$. Mais ~~[illegible]~~ $\forall M$ $\exists y \in \mathbb{Z}$, $y > M$.

alors $\|(0,y)\| = |y| = y > M$ et $(0,y) \notin B(0,M)$, mais $(0,y) \in F$.
$\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad$ $\mathbb{Q}\ \ \mathbb{Z}$

De façon analogue, on pouvait exhiber une suite $(p_n)_n$, $p_n \in F$ $\forall n$, $\|p_n\| \to +\infty$. Par exemple $p_n = (0,n)$ a cette propriété. (mais aussi $p_n = (n,0)$)

Exo 11 (c) $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| > 1$. $z_n = \lambda^n$. valeurs d'adhérence de (z_n) ?

On montre que $\|z_n\| \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$. En effet $\|z_n\| = |\lambda^n| = \underset{\underset{1}{\vee}}{|\lambda|}^n \to +\infty$ (limite dans les réels.)

Il s'en suit que toute sous-suite $(z_{n_k})_k$ n'est pas convergente.

En effet, si $z_{n_k} \to p$, $\Rightarrow$ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists K$ t.q. $\forall k > K$, $\|z_{n_k} - p\| < \varepsilon$

$\Rightarrow$ $\|z_{n_k}\| \leq \underbrace{\|p\| + \varepsilon}_{\overset{\shortparallel}{M}}$. En contradiction que $\exists N > 0$ t.q. $\forall n > N$, $\|z_n\| > M$.

Donc $Adh(z_n) = \emptyset$. Si $E_\lambda = \{ z^n \mid n \in \mathbb{N}^* \}$, alors $\overline{E_\lambda} = E_\lambda$.

En effet on peut montrer que $\overline{E_\lambda} = E_\lambda \cup Adh(z_n)$. (pour toute suite)

5

Sinon on peut montrer que E_λ est fermé :

Si $z \notin E_\lambda$, $z \neq \lambda^n$ $\forall n$. Comme $|\lambda|^n < |\lambda|^{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$,

~~tq~~ Soit $z \in B(0,1)$ soit $\exists N \in \mathbb{N}$ tq. $|\lambda|^N \leq |z| < |\lambda|^{N+1}$.

Si on est dans $B(0,1)$, $E_\lambda \cap B(0,1) \neq \emptyset$, et comme $B(0,1)$ est ouvert, on trouve ε tq. $B(z,\varepsilon) \cap E_\lambda = \emptyset$.

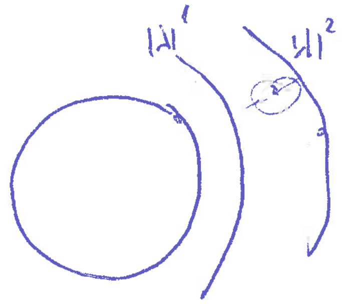
Si $|\lambda|^N < |z| < |\lambda|^{N+1}$, $\exists \varepsilon$ tq. $|\lambda|^N + \varepsilon < |z| < |\lambda|^{N+1} - \varepsilon$, et

$|z - \lambda^N| \geq |z| - |\lambda|^N > \varepsilon > 0$,

$|z - \lambda^{N+1}| \geq |\lambda|^{N+1} - |z| > \varepsilon > 0$.

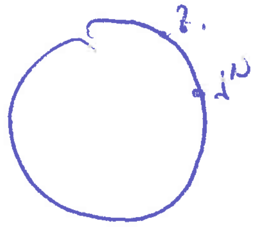
$|z - \lambda^n| > |z| - |\lambda|^N$ si $n < N$.

$|z - \lambda^n| > |\lambda|^{N+1} - |z|$ si $n > N+1$.



Si $\exists N$, $|z| = |\lambda^N|$, $z \neq \lambda^N$, $\Rightarrow \underset{=\varepsilon}{d(z,\lambda^N)} > 0$

et $B(z, \min(\underset{>0}{\varepsilon}, \underset{>0}{|\lambda|^N - |\lambda|^{N-1}})) \cap E_\lambda = \emptyset$.



Donc E_λ est fermé et $\overline{E_\lambda} = E_\lambda$.